

Propriétés des fonctions d'une variable réelle

1-Fonctions continues

2-Fonctions continues sur un intervalle

3-Dérivées



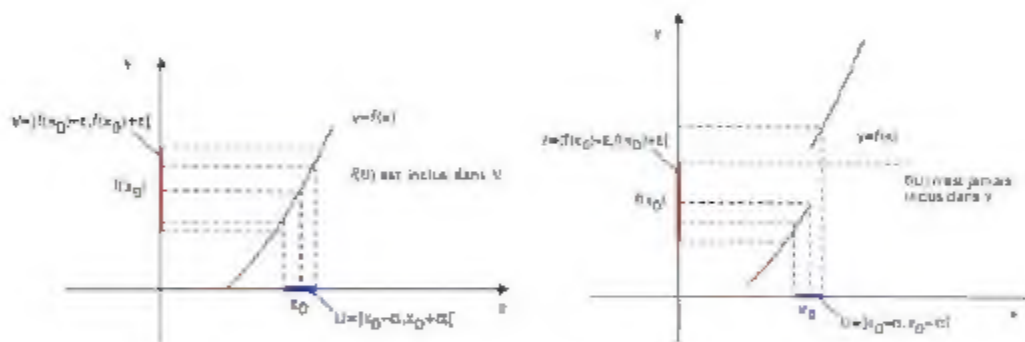
Fonctions continues

1- Continuité en un point

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et \mathcal{D}_f son ensemble de définition. On rappelle qu'une fonction est continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. En revenant à la notion de limite d'une fonction en un point, cela s'écrit

Définition Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, si $x \in \mathcal{D}_f$ et $|x - x_0| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

De manière un peu plus imagée, la fonction f est continue en x_0 lorsque pour tout voisinage



Une fonction continue en x_0 , et une qui ne l'est pas.

V de $f(x_0)$ (ce qui correspond à choisir un $\epsilon > 0$), on peut trouver un voisinage U de x_0 (c'est-à-dire un $\alpha > 0$) tel que

$$x \in U \cap D_f \Rightarrow f(x) \in V$$



Le résultat suivant n'a pas un très grand intérêt à notre niveau, mais il peut permettre de simplifier l'étude de la continuité. Il faut par contre bien comprendre sa preuve.

Proposition Les énoncés suivants sont équivalents :

1. La fonction f est continue en x_0 .
2. Pour toute suite (x_n) qui tend vers x_0 , on a $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$.

Preuve: On a déjà vu que (1) entraîne (2). On démontre maintenant la réciproque par l'absurde. Supposons que (2) soit vraie et que (1) soit fausse : il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que $f(x) \notin]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$. En particulier en prenant $\alpha = 1/n$, on construit une suite (x_n) telle que $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$, ce qui est absurde. \square

Pour fixer les idées, on rappelle que

Proposition

- Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 , alors $f + g$ et fg sont continues en x_0 .
- Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en x_0 .
- Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Proposition

- Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 , alors $f + g$ et fg sont continues en x_0 .
- Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en x_0 .
- Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Preuve: On va utiliser la caractérisation avec des suites (même si une démonstration directe n'est pas beaucoup plus difficile : **Exercice!**). Soit donc (x_n) une suite qui tend vers x_0 . On sait que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ et que $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$, donc $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow (f + g)(x_0)$ et $(fg)(x_n) \rightarrow (fg)(x_0)$ en utilisant les résultats sur la limite et le produit d'une somme de suites. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) qui tend vers x_0 , on a montré le premier point. Le second point découle directement du résultat sur la limite de l'inverse d'une suite. Enfin puisque g est continue en $f(x_0)$, on sait que $\lim(g(f(x_n))) = g(\lim(f(x_n)))$, ce qui donne bien $\lim(g(f(x_n))) = g(f(x_0))$. \square

Fonctions continues sur un intervalle

1 Fonctions continues sur un intervalle

Définition On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ lorsque f est continue en chaque point de $]a, b[$. On dit que f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ lorsque f est continue en chaque point de $]a, b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b .

Proposition Soit $a < b$ deux nombres réels. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$.

Preuve: Soit $A = \{x \in [a, b], f \text{ est bornée sur } [a, x]\}$. L'ensemble A est majoré par b , et c'est une partie non-vide de \mathbb{R} , $a \in A$ puisque $f(a)$ est un majorant et un minorant de f sur $[a, a]$. Donc A admet une borne supérieure, que l'on note c . Supposons que $c < b$. Puisque f est continue en c , il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - c| \leq \alpha$ et $x \in [a, b]$, alors $f(c) - 1 \leq f(x) \leq f(c) + 1$. Pour $\delta = \min\{\alpha, (b - c)/2\}$ on a donc f bornée sur $[a, c + \delta]$, ce qui est absurde. Donc $c = b$ et f est bornée sur $[a, b]$.

Attention ! on ne peut pas affaiblir l'hypothèse. Par exemple la fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0, 1[$, mais elle n'y est pas bornée : il est indispensable que l'intervalle soit fermé. De même, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas bornée sur cet intervalle. On retiendra donc qu'une fonction continue sur un intervalle borné et fermé de \mathbb{R} est bornée.

Utilisons encore une fois l'axiome de la borne supérieure : puisque l'ensemble $\{f(x), x \in [a, b]\}$ est non-vide ($a < b$) et borné, il admet une borne supérieure M et une borne inférieure m . Le résultat qui suit montre que m et M sont en fait respectivement un minimum et un maximum pour f sur $[a, b]$.

Proposition Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe x_0 et x_1 dans $[a, b]$ tels que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Proposition Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe x_0 et x_1 dans $[a, b]$ tels que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Preuve: Soit donc M la borne supérieure de f sur $[a, b]$, et supposons que $f(x) \neq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = 1/(M - f(x))$ est définie et continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée : il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que $0 < 1/(M - f(x)) \leq M_1$ pour tout $x \in [a, b]$. On a alors $M - f(x) > 1/M_1$ et $f(x) < M - 1/M_1$ pour tout $x \in [a, b]$, ce qui contredit le fait que M est le plus petit des majorants de f sur $[a, b]$. Donc il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = M$.

On montre de la même manière l'existence d'un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}$.

2-Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

Proposition Soit $a < b$ deux nombres réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Preuve: On va supposer que $f(a) < f(b)$, la preuve étant identique dans le cas où $f(b) > f(a)$. Soit donc

$y \in]f(a), f(b)[$, et $A = \{x \in [a, b], f(x) \leq y \text{ pour tout } t \in [a, x]\}$.

A est non-vide et majoré, donc admet une borne supérieure c . Supposons que $f(c) < y$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $f(c + \delta) < y$, ce qui est absurde. De même $f(c)$ ne peut pas être strictement supérieur à y , donc $f(c) = y$.

On peut faire mieux :

Proposition Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction continue sur $[a, b]$.

Soient aussi m et M les bornes inférieures et supérieures de f sur $[a, b]$. Si $y \in [m, M]$, alors il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Preuve: Il suffit d'appliquer le résultat précédent sur l'intervalle d'extrémités x_0 et x_1 , où $x_0, x_1 \in [a, b]$ sont tels que $f(x_0) = m$ et $f(x_1) = M$.

Pour résumer, on a démontré le résultat suivant :

Proposition Soient $a < b$ deux réels, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. L'ensemble $f([a, b]) = \{f(x), x \in [a, b]\}$ est l'intervalle $[m, M]$ où m et M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a, b]$.



Dérivées

1- Définitions

Définition Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ lorsque f est dérivable (i.e. admet un D.L. à l'ordre 1) en chaque point de $]a, b[$. On note alors f' la fonction définie sur $]a, b[$ qui à x associe le nombre dérivé de f au point x .

Définition Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]a, b[$ est de classe C^0 sur cet intervalle lorsque f est continue sur $]a, b[$. Si $k \geq 1$ est un entier, on dit que f est de classe C^k sur $]a, b[$ lorsque f est k fois dérivable sur $]a, b[$, et $f^{(k)}$ est continue sur $]a, b[$.

2- Extremums

Définition Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D , et I une partie de D . On dit que $x_0 \in I$ est

- un maximum de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(x_0)$;
- un minimum de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(x_0)$;
- un extremum de f sur I si c'est un maximum ou un minimum de f sur I ;
- un extremum global de f si c'est un extremum sur D ;
- un extremum local de f s'il existe un voisinage I de x_0 tel que x_0 est un extremum de f sur I .

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$. Si f admet un extremum local en un point c de $]a, b[$ alors $f'(c) = 0$.

Preuve: On n'écrit la preuve que dans le cas d'un maximum. Soit donc c un maximum local de f : il existe un voisinage $]c - \alpha, c + \alpha[$ de c tel que, pour tout $x \in]c - \alpha, c + \alpha[$, on a $f(x) \leq f(c)$. Puisque f est dérivable en c , il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que $f(c + h) = f(c) + hf'(c) + h\epsilon(h)$, ce qu'on peut écrire

$$f(c) = f(c+h) - h(f'(c) + \epsilon(h)).$$

Supposons que $f'(c) > 0$. Puisque $\epsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, il existe un voisinage V de la forme $]c-h_0, c+h_0[$ tel que $f'(c) + \epsilon(h) > f'(c)/2 > 0$. Mais alors pour $0 < h < h_0$, on a $h(f'(c) + \epsilon(h)) > 0$, donc $f(c) < f(c+h)$ ce qui est absurde. Le même raisonnement montre qu'on ne peut pas non plus avoir $f'(c) < 0$, et donc on a bien $f'(c) = 0$. \square

La réciproque de cette proposition est faussée : pour la fonction $f : x \mapsto x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0. Pour l'instant donc, on sait seulement que l'on doit chercher les éventuels extremums locaux d'une fonction dérivable f parmi ses **points critiques**, i.e. les points x tels que $f'(x) = 0$.

3- Le Théorème des Accroissements Finis

Proposition Soit g une fonction continue sur $[a, b]$. Si g est dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(c).$$

Preuve : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

On a $f(a) = f(b) = 0$, et f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus

$$f'(x) = g'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

donc $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$ si et seulement si $f'(c) = 0$.

D'après le Théorème de Weierstrass, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

- Cas 1 : x_1 et x_2 appartiennent à $\{a, b\}$. Alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$ donc f est la fonction constante nulle sur $[a, b]$: le théorème est vrai.
- Cas 2 : x_2 , par exemple, est différent de a et de b . On peut alors appliquer le résultat précédent : x_2 est nécessairement un point critique de f , i.e. $f'(x_2) = 0$.

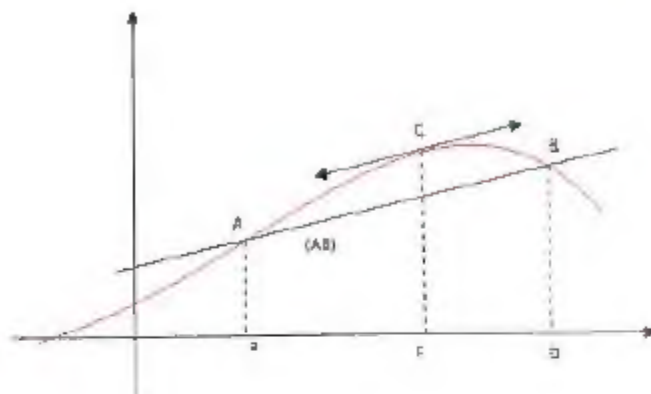


FIGURE – Le TAF : il y a un point où la tangente à C_f est parallèle à la droite (AB) .

Il y a deux idées dans cette preuve : d'abord on peut se ramener au cas où $f(b) = f(a) = 0$, et le TAF dans ce cas revient à dire qu'il existe un point $c \in]a, b[$ où la dérivée de f s'annule (ce résultat porte le nom de Théorème de Rolle). La deuxième idée repose sur le théorème de Weierstrass : puisque f est continue sur $[a, b]$, f admet un maximum et un minimum sur cet intervalle, qui ne peuvent pas être tous les deux en a ou en b : il s'agit donc d'un point critique.

Proposition Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$. Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.

Preuve: Soient $x_1 \leq x_2$ deux points de $]a, b[$. La fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, donc il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. Si f' est positive sur $]a, b[$, on a $f'(c) \geq 0$ donc $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ceci tant que pour tout couple (x_1, x_2) de points de $]a, b[$, f est bien croissante sur cet intervalle.



4-Formule de Taylor-Lagrange

Proposition Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = T_{n,a}(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où $T_{n,a}(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a :

$$T_{n,a}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Cette égalité porte le nom de Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n .

Preuve: Il suffit d'appliquer le TAF (en fait Rolle) à la fonction g définie par

$$g(x) = f(b) - T_{n,x}(b) - C \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où C est choisi de sorte que $g(a) = 0$.

Voici un cas où l'on peut affirmer qu'un point critique est un extremum local :

Proposition Soit f une fonction de classe C^2 sur $]a, b[$, et $x_0 \in]a, b[$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en x_0 : c'est un maximum local si $f''(x_0) < 0$ et un minimum local si $f''(x_0) > 0$.

Preuve: On n'écrit la preuve que dans le cas $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$. Puisque f'' est continue en x_0 , il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $c \in]x_0 - h_0, x_0 + h_0[$, on a $f''(c) > 0$. Or pour chaque h tel que $|h| < h_0$, il existe c entre x_0 et $x_0 + h$, donc dans $]x_0 - h_0, x_0 + h_0[$, tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(c) = f(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(c),$$

ce qui montre que $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$: x_0 est bien un minimum local pour f .